

雙手臂機器人研究報告

用於一俱偏移於肩膀和手腕的模組化雙手臂機器人的逆運動學解析解

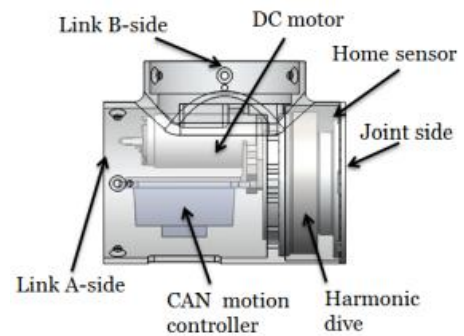
研究動機與概要

基本上，如同 PUMA560 般的工業手臂都具有 6 個自由度，剛好可以完成 3D 空間中的定位與定向。但要做出如同人類手臂般靈巧的運動，機械手臂就必須具備 7 個自由度。加上一冗餘自由度後，機械手臂可以在定位與定向外額外完成避障、避奇異點等要求。這些都是和機械手臂運動學相關的任務。在使用手臂的時候，我們會遇到求解逆運動學的問題。一般來說有兩種方法可以求解逆運動學的解。一種是數值法而另一種是解析法。傳統上使用數值解作為求解方式。但是在使用數值解時，求雅可比矩陣及其反矩陣非常冗長，且因為關節角度和空間中的位置與定向並非線性關係，使用此方法求解並不精確。

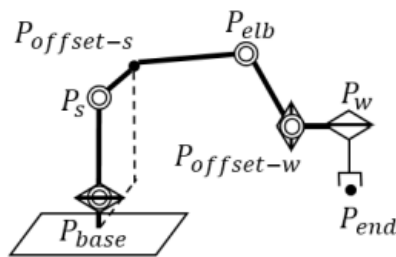
所以，針對實驗室全新開發的模組化 7 自由度雙手臂機器人，我們以不同的關節當作冗餘自由度，求出了該型態機械手臂的逆運動學解析解。該手臂型態最大的特徵是，在肩膀及手腕處皆具有偏移。圖一中所示即為文中提及的機械手臂，為本中心新設計的雙手臂機器人的其中一隻。



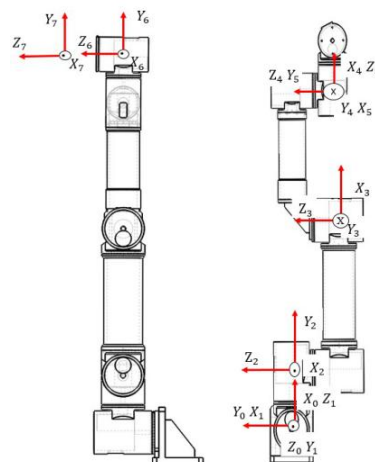
圖一 肩膀及手腕具有偏移的 7 自由度模組化機械手臂，這是由本中心設計的全新雙手臂機器人的其中一隻。



圖二 模組化零件圖



圖三 本手臂結構示意圖



圖四、本手臂的座標系圖

主要技術

1. 模組化零件

本手臂中安裝馬達、控制器、減速齒輪的部分是由模組化零件構成的，如同圖二所示。手臂的上臂及下臂可以安裝在該模組化零件的 A 及 B 處。除此之外，零件上另設有一鏤空區，便於維修及更換控制器。模組化零件使的本手臂的組裝更簡化。

2. 逆運動學解析解

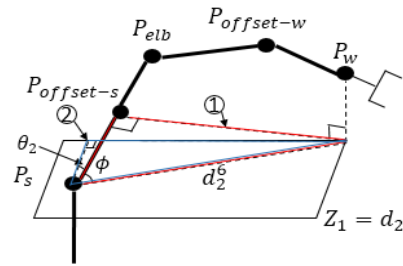
如同圖三所示，因為肩膀和手腕處皆具有偏一，我們並不能使用常用的固定手臂角度法求解逆運動學解析解。因此，我們使用固定關節法。首先，令第一軸為冗餘參數求出一解析解。另一組解析解是令第二軸為冗餘參數求出的。

在接下來的篇幅中，我們將 $A_{b,c}^a = d$ 定義成相對於座標系 b，且某個參數 c 的值为 d 時，A 的值。除此之外，如同圖三和圖四中所示，座標系 0 和座標系 1 的原點定義為 P_b ，但兩座標系的定向不同。座標系 2 的原點為 P_s ，座標系 3 的原點為 P_e 。座標系 4 及座標系 5 的原點為 $P_{offset-w}$ ，其中兩者具有不同的定向。最後，座標系 6 和座標系 7 的原點分別為 P_w 和 P_{end} 。

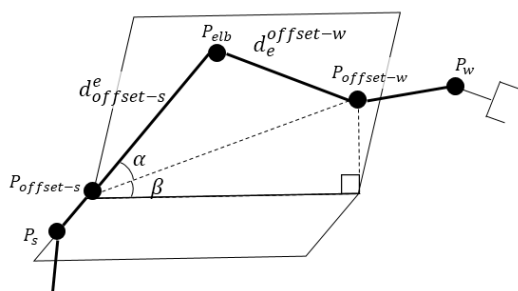
DENAVIT HARTENBERG PARAMETERS

Joint	θ (rad)	α (rad)	a(m)	d(m)	θ_{min} ($^\circ$)	θ_{max} ($^\circ$)
1	$\theta_1 + \pi/2$	$\pi/2$	0	0	-90	90
2	$\theta_2 + \pi/2$	$\pi/2$	0.131	0	-90	90
3	$\theta_3 + \pi/2$	0	-0.131	0.350	-80	80
4	θ_4	0	0	0.301	-90	0
5	$\theta_5 + \pi/2$	$\pi/2$	0	0	-90	90
6	$\theta_6 + \pi/2$	$\pi/2$	0.115	0	-90 ⁺	90 ⁻
7	$\theta_7 + \pi/2$	$\pi/2$	0.120	0	-180	180

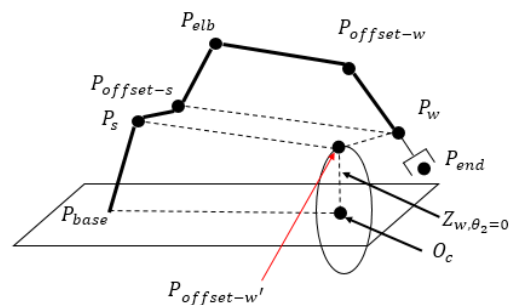
表格 1 DH 參數



圖五 求解第二軸角度時使用的投影三角形



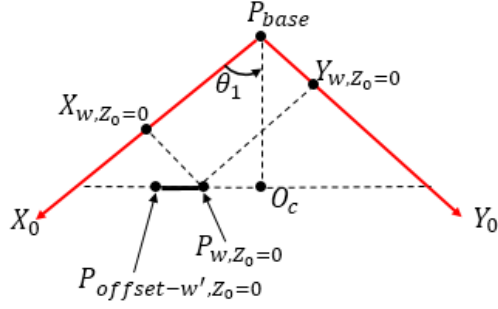
圖六 由 $P_{offset-w}$ 、 P_e 和 $P_{offset-s}$ 構成的三角形



圖七 當除了第一軸，其他關節都固定時，虛擬手腕點的移動軌跡

A. 以第一軸為冗餘關節時的逆運動學解析解

在已知機械手臂末端的定位 P_0^7 和定向 R_0^7 ，我們可以求解座標系 6 原點的位置 P_0^6 ：



圖八 冗餘圓在 $Z_0 = 0$ 的平面上的投影

$$\begin{cases} P_0^6 = P_0^7 + R_0^7 v_7^6 \\ v_7^6 = [0 \quad 0 \quad -d_7]^T \end{cases} \quad (4)$$

其中 V_7^6 為由末端點位置到手腕位置的向量。下一步，由於第一軸的角度已知，我們也可以求出肩膀的原點的位置， P_0^2 ：

$$P_0^2 = [d_2 \cos \theta_1 \quad d_2 \sin \theta_1 \quad 0]^T \quad (5)$$

接著我們就可以求出相對於座標系 1 的點 P_1^2 和 P_1^6 ：

$$\begin{cases} P_1^2 = R_0^1 P_0^2 \\ P_1^6 = R_0^1 P_0^6 \end{cases} \quad (6)$$

下一步要找出 $P_{1,z=d_2}^2$ ，如同圖五所示。我們可以藉著投影三角形求出第二軸角度：

$$\begin{cases} \phi = \text{atan2}(\sqrt{d_{26}^2 - d_3^2}) \\ \theta_2 = \text{atan2}(Y_{1,z=d_2}^6, X_{1,z=d_2}^6) - \phi \end{cases} \quad (7)$$

其中 ϕ 為三角形 1 的其中一個內角， d_{26} 為 P_1^2 到 $P_{1,z=d_2}^6$ 。目前為止，我們已求出第一軸及第二軸 θ_1 和 θ_2 ，現在我們可以藉由下面的式子求出第七軸及第六軸的角度：

$$R = R_2^7 = R_0^2 R_0^7 \quad (8)$$

$$R = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ -\cos \theta_6 \cos \theta_7 & \cos \theta_6 \sin \theta_7 & -\sin \theta_6 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \theta_6 = \text{atan2}(-R_{3,3}, \sqrt{R_{3,1}^2 + R_{3,2}^2}) \\ \theta_7 = \text{atan2}(-R_{3,2}, R_{3,1}) + \pi \end{cases} \quad (10)$$

其中 R_{ij} 代表 R 矩陣第 i 列，第 j 欄的值。由以上求得的第一軸、第二軸、第六軸、第七軸的角度，我們可以求出 $P_{\text{offset-s}}$ 和 $P_{\text{offset-w}}$ ：

$$\begin{cases} T = T_2^5 = T_2^1 T_1^0 T_0^7 T_7^6 T_6^5 \\ P_{\text{offset-w}} = P_2^5 = [T_{1,4} \quad T_{2,4} \quad T_{3,4}]^T \end{cases} \quad (11)$$

$$P_2^{offset} = [0 \quad 0 \quad -d_3]^T \quad (12)$$

接著，藉由投影在座標系 2 的 z 軸座標為 $-d_3$ 的平面，由 $P_{offset-s}$ 、 P_e 、和 $P_{offset-w}$ ，我們可以求出第三軸和第四軸的角度：

$$\begin{cases} \cos \theta_4 = \frac{d_{offset-s}^3{}^2 + d_3^5{}^2 - d_{offset-s}^5{}^2}{2 \times d_3^5 \times d_{offset-s}^3} \\ \theta_4 = atan2(\sqrt{1 - \cos^2 \theta_4}, \cos \theta_4) \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{d_{offset-s}^3{}^2 + d_{offset-s}^5{}^2 - d_3^5{}^2}{2 \times d_{offset-s}^3 \times d_{offset-s}^5} \\ \beta = atan2(Y_2^5, X_2^5) \\ \theta_3 = \alpha + \beta - \pi/2 \end{cases} \quad (14)$$

其中 $d_{offset-s}^3$ 為 a_3 ， d_3^5 為 a_4 ，如同表 1 所示。而 $d_{offset-s}^5$ 可以由簡單的使用尤拉距離公式求出。到此，僅剩第五軸的角度上為求出。第五軸的角度可藉由下式求出：

$$R = R_4^5 = R_0^{4T} R_0^7 R_5^{7T} \quad (15)$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta_5 + \pi/2 & \dots & \dots \\ \sin \theta_5 + \pi/2 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\theta_5 = atan2(R_{2,1}, R_{1,1}) - \pi/2 \quad (17)$$

到此，我們已由已知手臂末端點的位置與定向，求出所有座標軸的角度。並且是以第一軸為冗餘關節。

B. 以第二軸為冗餘關節時的逆運動學解析解

由於使用模組化零件的關係，本手臂在組裝時第一軸和第二軸可以互換順序。這代表第一軸和第二軸對於末端點位置和定向具有類似的影響。因此，為了使逆運動學的解析解更完整，我們接著求出以第二軸角度值為冗餘參數的逆運動學解析解。當我們知道第一軸關節值時， $P_{offset-s}$ 可以輕易的被求出，接著可以(6)和(7)求出第二軸關節的值。反過來說，當已知第二軸關節值時，我們可藉由圖七中的軌跡圓，求出第一軸關節值。接著使用(8)到(17)可以求出所有關節的角度。如同圖七所示， P_w 在一以 O_C 為圓心的圓上。基於如圖四所示，我們訂定的手臂座標系， P_s 和 $P_{offset-s}$ 間的距離，和我們定義一新的虛擬手腕點， $P_{offset-w'}$ ，和 $P_{offset-w}$ 間的距離是一樣的。定義該虛擬首萬點後，我們可以求出 O_C 和 P_b 的距離：

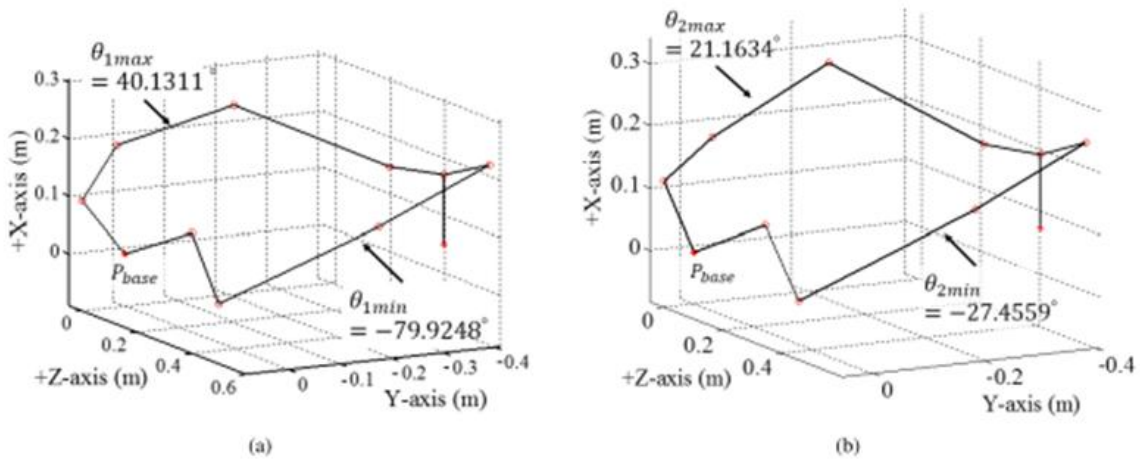
$$\begin{cases} Z_{0,\theta_2=0}^w = Z_{0,\theta_2=0}^6 = (Z_0^6 - d_3 \sin \theta_2) / \cos \theta_2 \\ d_0^{offset-w'} = \sqrt{d_0^6{}^2 - d_3^2} \end{cases} \quad (18)$$

$$d_0^{Oc} = \sqrt{d_0^{\text{offset}-w'}^2 - Z_{0,\theta_2=0}^w{}^2} \quad (19)$$

其中 $Z_{0,\theta_2=0}^w$ 為該軌跡圓的半徑， $d_0^{\text{offset}-w'}$ 是虛擬手腕點和手臂原點 P_b 的距離。下一步，我們可以藉由如圖八所示的投影三角形，求出第一軸關節值：

$$d_0^{Oc} = Y_{w,Z_0=0} \sin \theta_1 + X_{w,Z_0=0} \cos \theta_1 \quad (20)$$

$\sin \theta_1$ 和 $\cos \theta_1$ 可以使用 $\tan \frac{\theta_1}{2}$ 作為參數分別表示為兩個二次式。把(20)整理成一元二次式後，我們可以求出第一軸關節值。我們可以藉由(4)到(7)確認該一元二次式的解何者為正確解。



圖九 基於機械手臂的關節限制，所畫出的手臂姿勢圖。圖九(a)是以第一軸關節值為冗餘參數所畫出的，而圖九(b)中，則是以第二軸關節值為冗餘參數。末端點的位置是由(23)和(24)決定的。

實驗結果

為了驗證以上所推導的逆運動學解析解的正確性，以下將以程式模擬驗證。模擬將以本中心特製的模組化、於肩膀及手腕具偏移的手臂，如圖一所示。除此之外，各軸座標系的設置如同圖四所示。此種模組化的手臂的優點之一是每個軸作360度的轉動，然而在考慮手臂工作環境後，如同表一所示，我們對每個軸加上了角度限制。假設有一末端目標點座標及定向旋轉矩陣為：

$${}^d_1 P_0^7 = [0.1 \quad -0.3 \quad 0.6]^T \quad (23)$$

$${}^d_1 R_0^7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

我們分別驗證了以第一軸及第二軸關節值為冗餘參數的的解析解。在圖九(a)中，第一軸關節值為最大值時，七軸角度值各為：

$$\{40.1311^\circ, 21.0410^\circ, -79.9999^\circ, -47.5916^\circ, 20.7521^\circ, -36.9819^\circ, 116.7087^\circ\}$$

為最小值時各軸角度為

$$\{-79.9248^\circ, -27.4559^\circ, -54.7635^\circ, -14.1619^\circ, -89.9995^\circ, 60.8894^\circ, 18.6079^\circ\}$$

如圖九(b)中所示，第二軸關節值為最大值時，各軸角度分別為：

$$\{24.6492^\circ, 21.1634^\circ, -67.1780^\circ, -53.8042^\circ, 21.5756^\circ, -22.8881^\circ, 113.0717^\circ\}$$

為最小值時各軸角度為：

$$\{-76.6303^\circ, -27.4559^\circ, -50.5157^\circ, -20.8797^\circ, -81.3340^\circ, 59.6911^\circ, 23.9906^\circ\}$$

再經由齊次轉換矩陣計算順向運動學即可驗證以上推導的逆運動學解析解均正確。

未來應用

藉著推導一七自由度具冗餘關節的模組化手臂，我們可以更快更精確的計算運動學問題。並且藉著新設計的模組化零件，也讓本手臂的組裝更為容易。